MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

DIRECTION GENERALE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPERIEUR ET DE L'EMPLOYABILITE **(DGESE)**

REPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE
Union - Discipline - Travail

Institut National Polytechnique
Félix Houphouët – Boigny
SERVICE DES CONCOURS

Concours CAE session 2015

Composition : Mathématiques 1 (algèbre, analyse)

Durée : 2 Heures

Dans ce sujet, il sera tenu compte de la présentation de la copie et de la clarté du raisonnement dans la notation. Les calculatrices ne sont pas autorisées. $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels, $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels. Les trois (3) exercices sont indépendants.

Exercice N°1 :

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On considère le polynôme $P = (X\sin\theta + \cos\theta)^n$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 1$.

Exercice N°2 :

1) Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer si possible P^{-1}.

2) La matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

3) On définit les trois suites numériques (u_n), (v_n) et (w_n) par la donnée de termes initiaux u_0, v_0, w_0 et pour tout entier naturel n , par les relations de récurrence :

$$u_{n+1} = 2u_n - 2v_n + w_n; \; v_{n+1} = 2u_n - 3v_n + 2w_n; \; w_{n+1} = 2v_n - u_n \, .$$

Déterminer u_n, v_n et w_n en fonction de u_0, v_0, w_0 et n .

Exercice N°3 :

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{-x\ \ln x}{1+x^2} \quad \text{pour } x > 0\,, \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

1)

a) Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b) Etudier le signe de $f(x)$.

2) Montrer que l'on définit bien une fonction F sur $\mathbb{R}_+$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+\,, \qquad F(x) = \int_0^x f(t)dt\,.$$

3) Pour tout x de $\mathbb{R}_+$ on pose $g(x) = F(x) - x$.

a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que, pour $x > 0$, on peut écrire $g'(x)$ sous la forme :

$$g'(x) = \frac{-x\ h(x)}{1+x^2}$$

b) Etudier les variations de h , puis en déduire son signe. On donne :

$$\ln\left(\frac{\sqrt{5}\ -1}{2}\right) \cong -0{,}48$$

c) En déduire le signe de $g(x)$.

4) On définit la suite (u_n) par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence, valable pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = F(u_n)$.

a) Etablir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ 0 \leq u_n \leq 1$

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.